BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2013*

УДК 02.25.19

ОБ АППРОКСИМАЦИИ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА В ГЕЛЬДЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.Ф.АМРАХОВА

Бакинский Государственный Университет

1919-bdu@mail.ru

В работе сингулярный интегральный оператор с ядром Гильберта и регулярный интегральный оператор аппроксимируется последовательностями операторов специального вида, доказывается, что для сингулярного оператора аппроксимирующие операторы сохраняют свойства, аналогичные основным свойствам этого оператора и, поэтому полученные оценки с точки зрения скорости сходимости дают более точные результаты.

Ключевые слова: *сингулярный интеграл, регулярный интеграл, гельдерово пространство, ядро Гильберта, аппроксимирующие операторы, скорости сходимости.*

Пусть $H_\alpha \equiv H_\alpha([0,2\pi])$ пространство 2π-периодических непрерывных по Гельдеру с показателем α $(0<\alpha\le 1)$ функций с нормой $\|\varphi\|_\alpha = \|\varphi\|_\infty + H(\varphi;\alpha)$, где $\|\varphi\|_\infty = \max\limits_{t\in[0;2\pi]} |\varphi(t)|$,

$H(\varphi;\alpha) \equiv \sup\left\{ |\varphi(t_1)-\varphi(t_2)| \,/\, |t_1-t_2|^\alpha : t_1, t_2 \in [0,2\pi], \ t_1 \ne t_2 \right\}$.

Рассмотрим в H_α $(0<\alpha\le 1)$ сингулярный интегральный оператор с ядром Гильберта

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{t-\tau}{2}\varphi(\tau)d\tau$$

и регулярный интегральный оператор

$$(\mathbf{K}\ \varphi)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau,$$

где функция $K(t,\tau)$ 2π-периодична и непрерывна по Гельдеру с показателем α $(0<\alpha\le 1)$ по обоим аргументам, т.е. $\exists M>0$ такое, что $\forall(t_1,\tau_1),\ (t_2,\tau_2)\in[0,2\pi]^2$

$$\left|K(t_1,\tau_1)-K(t_2,\tau_2)\right|\le M\left[\left|t_1-t_2\right|^{\alpha}+\left|\tau_1-\tau_2\right|^{\alpha}\right].$$

В данной работе операторы S и **K** аппроксимируются последовательностями операторов вида

$$(R_n\varphi)(t)=\sum_{k=0}^{2n-1} r_k^{(n)}(t)\varphi\left(t+\frac{\pi k}{n}\right)$$

в пространстве H_α, где $r_k^{(n)}(t)-$ постоянные функции в случае S и непрерывные по Гельдеру функции, выраженные через ядро, в случае **K**. Для сингулярного оператора S значения построенных аппроксимирующих операторов S_n совпадают со значениями оператора S для тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$, и поэтому полученные оценки с точки зрения скорости сходимости дают более точные результаты, нежели оценки, полученные ранее другими методами (см. [1]-[5]). Аналогичные аппроксимации и его применения к сингулярным интегральным уравнениям в пространстве $L_2([0;\,2\pi])$ приведены в работе [6] для сингулярного интегрального оператора с ядром Коши и в работах [7,8] для сингулярного интегрального оператора с ядром Гильберта.

Следующее утверждение хорошо известно и следует из соответствующих результатов [13].

Теорема А . Операторы S и **K** действуют из пространства H_α в себя, где $0<\alpha<1$ в случае S и $0<\alpha\le 1$ в случае **K.**

Рассмотрим последовательность операторов

$$(S_n\varphi)(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} ctg\left(-\frac{\pi(2k+1)}{2n}\right)\varphi\left(t+\frac{\pi(2k+1)}{n}\right),\quad n=2,3,\dots .$$

Из неравенства $ctg\theta\le\frac{\pi}{2}\theta$ $\left(\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)\right)$ следует, что для любого $\varphi\in H_\alpha$ $(0<\alpha\le 1)$

$$\|S_n\varphi\|_\alpha\le\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|ctg\frac{\pi(2k+1)}{2n}\right|\left\|\varphi\left(t+\frac{\pi(2k+1)}{n}\right)\right\|_\alpha=\frac{\|\varphi\|_\alpha}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|ctg\frac{\pi(2k+1)}{2n}\right|\le$$

$$\le\frac{\|\varphi\|_\alpha}{n}\sum_{k=1}^{2n-1}\left|ctg\frac{\pi k}{2n}\right|\le\frac{2\|\varphi\|_\alpha}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2n}{\pi k}\cdot\frac{\pi}{2}=2\|\varphi\|_\alpha\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\le 2\|\varphi\|_\alpha\cdot\left[\ln n+c_0\right],$$

где c_0 – постоянная Эйлера. Это показывает, что операторы S_n, $n = 2,3,\dots$, также действуют из пространства H_α в себя и выполняется неравенство

$$\|S_n\|_{H_\alpha \to H_\alpha} \equiv \sup\left\{\|S_n\varphi\|_\alpha : \varphi \in H_\alpha, \|\varphi\|_\alpha \le 1\right\} \le 2\ln n + 2c_0. \tag{1}$$

Пусть $E_n(\varphi) = \inf\|\varphi(\cdot) - T_{n-1}(\cdot)\|_\infty$ – наилучшее равномерное приближение функции $\varphi \in C([0,2\pi])$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n, $n \in N$. Полином $T_n^*(t)$, для которого $E_n(\varphi) = \|\varphi - T_n^*\|_\infty$ называется полиномом наилучшего равномерного приближения функции $\varphi(t)$. Известно, что (см. [9 ; 10]) для каждой функции $\varphi \in C([0,2\pi])$ полином наилучшего равномерного приближения существует и единственен.

Обозначим $\omega(\varphi;\delta) = \sup\left\{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| : |t_1 - t_2| \le \delta\right\}$ $(\delta \ge 0)$.

Очевидно, что если $\varphi \in H_\alpha$ $(0 < \alpha \le 1)$, то

$$\omega(\varphi;\delta) \le H(\varphi;\alpha)\cdot\delta^\alpha. \tag{2}$$

Известно, что [11] (см. также [9; 10])

$$E_n(\varphi) \le c_1 \cdot \omega(\varphi; 1/n), \tag{3}$$

где c_1 – положительная постоянная, не зависящая от n и функции $\varphi(t)$. Из неравенств (2), (3) следует, что если $\varphi \in H_\alpha$ $(0 < \alpha \le 1)$, то

$$E_n(\varphi) \le \frac{c_1}{n^\alpha}\cdot H(\varphi;\alpha). \tag{4}$$

Лемма 1. Пусть $\varphi \in H_\alpha$ и $T_n^*(t)$ – полином наилучшего равномерного приближения функции $\varphi(t)$ порядка $n \in N$. Тогда $(0 < \beta \le \alpha < 1)$

$$\|\varphi - T_n^*\|_\beta \le \frac{c_2}{n^{\alpha-\beta}}\cdot H(\varphi;\alpha), \tag{5}$$

где c_2 – постоянная, не зависящая от n и функции $\varphi(t)$.

Доказательство. Для каждого фиксированного $n \in N$ возможны два случая: $|t_1 - t_2| < \frac{1}{n}$ и $|t_1 - t_2| \ge \frac{1}{n}$. В случае $|t_1 - t_2| \ge \frac{1}{n}$ в силу неравенства (4), имеем

$$\frac{|\varphi(t_1) - T_n^*(t_1) - \varphi(t_2) + T_n^*(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta} \le 2\|\varphi - T_n^*\|_\infty \cdot n^\beta = 2n^\beta E_n(\varphi) \le \frac{2c_1}{n^{\alpha-\beta}}\cdot H(\varphi;\alpha).$$

Оставить также $|t_1 - t_2| < \frac{1}{n}$. В силу следствия 3.1 [12; § 4], имеем

$$\omega(T_n^*;\delta) \le c_3\,\omega(\varphi;\,\delta), \tag{6}$$

где c_3 – абсолютная постоянная. Так как $\varphi \in H_\alpha$, то $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \le |t_1 - t_2|^\alpha \cdot H(\varphi;\, \alpha)$, откуда, учитывая неравенства (2) и (6), получаем

$$\left|T_n^*(t_1) - T_n^*(t_2)\right| \le c_3 \cdot |t_1 - t_2|^\alpha \cdot H(\varphi;\, \alpha).$$

Отсюда, в силу последней оценки имеем

$$\frac{\left|\varphi(t_1) - T_n^*(t_1) - \varphi(t_2) + T_n^*(t_2)\right|}{|t_1 - t_2|^\beta} \le \frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta} + \frac{\left|T_n^*(t_1) - T_n^*(t_2)\right|}{|t_1 - t_2|^\beta} \le$$

$$\le |t_1 - t_2|^{\alpha-\beta}(1 + c_3)\, H(\varphi;\alpha) \le \frac{1 + c_3}{n^{\alpha-\beta}} \cdot H(\varphi;\alpha),$$

тем самым неравенство (5) справедливо и в этом случае. Лемма 1 доказана.

Теорема 1. Для любого $\varphi \in H_\alpha$ $(0 < \alpha \le 1)$ последовательность функций $\{S_n\varphi(t)\}$ сходится к функцию $(S\varphi)(t)$ в пространстве H_β $(0 < \beta < \alpha \le 1)$, при этом справедлива оценка

$$\|S\varphi - S_n\varphi\|_\beta \le \frac{c_4 + c_5 \ln n}{n^{\alpha-\beta}} \cdot H(\varphi;\alpha), \qquad (7)$$

где c_4 и c_5 – абсолютные постоянные, не зависящие от n и функции $\varphi(t)$.

Доказательство. Так как для любого тригонометрического полинома T_{n-1} порядка не выше $n-1$, справедливо равенство (см. [7])

$$(S_n T_{n-1})(t) = (S T_{n-1})(t),$$

то

$$(S\varphi)(t) - (S_n\varphi)(t) = S\left(\varphi - T_{n-1}^*\right)(t) - S_n\left(\varphi - T_{n-1}^*\right)(t),$$

где $T_{n-1}^*(t)$ – полином наилучшего равномерного приближения функции $\varphi(t)$ порядка $n-1$.

Отсюда, в силу неравенства (1) и леммы 1 следует оценка

$$\|S\varphi - S_n\varphi\|_\beta \le \|S\|_{H_\beta \to H_\beta} \left\|\varphi - T_{n-1}^*\right\|_\beta + \|S_n\|_{H_\beta \to H_\beta} \left\|\varphi - T_{n-1}^*\right\|_\beta \le$$

$$\le (2\ln n + 2c_0) \cdot \frac{c_2}{n^{\alpha-\beta}} \cdot H(\varphi;\alpha).$$

Теорема1 доказана.

Пусть функция $P(t,\tau)$ 2π -периодична и непрерывна по Гельдеру с показателем α $(0 < \alpha \le 1)$ по обоим аргументам. Обозначим

$$H(P;\alpha) = \inf\left\{M : |P(t_1,\tau_1) - P(t_2,\tau_2)| \le M\left(|t_1 - t_2|^\alpha + |\tau_1 - \tau_2|^\alpha\right)\right\}.$$

Рассмотрим интеграл

$$F(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(t,\tau)\,d\tau$$

и последовательность функций

$$F_n(t)=\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}P\left(t,t+\frac{\pi k}{n}\right),\quad n=1,2,\dots\,.$$

Лемма 2. Справедлива оценка

$$\|F-F_n\|_\beta\le\frac{c_6}{n^{\alpha-\beta}}\cdot H(P;\alpha),\tag{8}$$

где $0<\beta\le\alpha$, c_6 – постоянная, не зависящая от n и функции $P(t,\tau)$.

Доказательство. Так как

$$F(t)-F_n(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(t,\tau)\,d\tau-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}P\left(t,t+\frac{\pi k}{n}\right)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{2n-1}\int_{t+\frac{\pi k}{n}}^{t+\frac{\pi(k+1)}{n}}P(t,\tau)\,d\tau-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{2n-1}\int_{t+\frac{\pi k}{n}}^{t+\frac{\pi(k+1)}{n}}P\left(t,t+\frac{\pi k}{n}\right)d\tau=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{2n-1}\int_{t+\frac{\pi k}{n}}^{t+\frac{\pi(k+1)}{n}}\left[P(t,\tau)-P\left(t,t+\frac{\pi k}{n}\right)\right]d\tau,$$

то справедлива оценка

$$|F(t)-F_n(t)|\le\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{2n-1}\int_{t+\frac{\pi k}{n}}^{t+\frac{\pi(k+1)}{n}}\left|P(t,\tau)-P\left(t,t+\frac{\pi k}{n}\right)\right|d\tau\le\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{2n-1}\int_{t+\frac{\pi k}{n}}^{t+\frac{\pi(k+1)}{n}}\left|\tau-t-\frac{\pi k}{n}\right|^\alpha\cdot H(P;\alpha)\,d\tau\le$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{2n-1}\int_{t+\frac{\pi k}{n}}^{t+\frac{\pi(k+1)}{n}}\left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha H(P;\alpha)\,d\tau=\left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha H(p;\alpha),$$

откуда

$$\|F-F_n\|_\infty\le\left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha H(P;\alpha).\tag{9}$$

Если $|t_1-t_2|\ge\frac{1}{n}$, то в силу (9) имеем

$$\frac{|F(t_1)-F_n(t_1)-F(t_2)+F_n(t_2)|}{|t_1-t_2|^\beta}\le2\|F-F_n\|_\infty\cdot n^\beta\le\frac{2\pi^\alpha}{n^{\alpha-\beta}}\cdot H(P;\alpha).$$

Рассмотрим случай, когда $|t_1-t_2|<\frac{1}{n}$. Имеем

$$\frac{\left|F(t_1)-F_n(t_1)-F(t_2)+F_n(t_2)\right|}{\left|t_1-t_2\right|^{\beta}} \le \frac{\left|F(t_1)-F(t_2)\right|}{\left|t_1-t_2\right|^{\beta}} + \frac{\left|F_n(t_1)-F_n(t_2)\right|}{\left|t_1-t_2\right|^{\beta}}. \qquad (10)$$

Далее, учитывая оценки

$$\left|F(t_1)-F(t_2)\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|P(t_1,\tau)-P(t_2,\tau)\right|d\tau \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|t_1-t_2\right|^{\alpha}H(P;\alpha)d\tau = \left|t_1-t_2\right|^{\alpha}H(P;\alpha),$$

$$\left|F_n(t_1)-F_n(t_2)\right| \le \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\left|P\left(t_1,t_1+\frac{\pi k}{n}\right)-P\left(t_2,t_2+\frac{\pi k}{n}\right)\right| \le \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}2\left|t_1-t_2\right|^{\alpha}H(p;\alpha) = 2\left|t_1-t_2\right|^{\alpha}H(P;\alpha)$$

в неравенстве (10), получим

$$\frac{\left|F(t_1)-F_n(t_1)-F(t_2)+F_n(t_2)\right|}{\left|t_1-t_2\right|^{\beta}} \le 3\left|t_1-t_2\right|^{\alpha-\beta}H(P;\alpha) < \frac{3}{n^{\alpha-\beta}}\cdot H(P;\alpha).$$

Лемма 2 доказана.

Рассмотрим последовательность операторов

$$(\mathbf{K}_n\,\varphi)(t) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}K\left(t,t+\frac{\pi k}{n}\right)\varphi\left(t+\frac{\pi k}{n}\right),\quad n=1,2,\ldots.$$

Нетрудно убедиться, что операторы $\mathbf{K}_n$, $n=1,2,\ldots$, действует из пространства H_α $(0<\alpha\le 1)$ в себя.

Теорема 2. Для любого $\varphi\in H_\alpha$ $(0<\alpha\le 1)$ последовательность функций $\{\mathrm{K}_n\varphi(t)\}$ сходится к функции $(\mathrm{K}\varphi)(t)$ в пространстве H_β $(0<\beta<\alpha)$, при этом справедлива оценка

$$\|\mathbf{K}\varphi-\mathbf{K}_n\,\varphi\|_{\beta} \le \frac{c_6}{n^{\alpha-\beta}}\left[\|\varphi\|_\infty\cdot H(K;\alpha)+\|K\|_\infty\cdot H(\varphi;\alpha)\right]. \qquad (11)$$

Доказательство. Полагая $P(t,\tau)=K(t,\tau)\varphi(\tau)$, согласно лемме 2 получим неравенство

$$\|\mathbf{K}\varphi-\mathbf{K}_n\,\varphi\|_{\beta} \le \frac{c_6}{n^{\alpha-\beta}}\cdot H(P;\alpha). \qquad (12)$$

Далее, так как

$$\left|P(t_1,\tau_1)-P(t_2,\tau_2)\right| = \left|K(t_1,\tau_1)\varphi(\tau_1)-K(t_2,\tau_2)\varphi(\tau_2)\right| \le$$

$$\le \left|\varphi(\tau_1)\right|\cdot\left|K(t_1,\tau_1)-K(t_2,\tau_2)\right| + \left|K(t_2,\tau_2)\right|\cdot\left|\varphi(\tau_1)-\varphi(\tau_2)\right|,$$

то из неравенства (12) следует оценка (11). Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань: Казанский университет, 1980, 231 с.

2. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985, 256 с.
3. Иванов В.В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев: Наук. думка, 1968, 287 с.
4. Шешко М.А. Прямой метод решения сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта // Докл. АН БССР. 1987, т.31, № 12, с. 1077-1080
5. Бабаев А.А., Мусаев Б.И. Приближенное решение полного линейного сингулярного интегрального уравнения с ядром Гильберта // Мат. заметки, 1987, т. 41, № 5, с. 693-709.
6. Алиев Р.А. Новый конструктивный метод решения сингулярных интегральных уравнений // Матем. заметки. 2006, т. 79, в. 6, с. 803-824.
7. Алиев Р.А., Амрахова А.Ф. Об аппроксимации сингулярного интеграла с ядром Гильберта // Вестник Бак. Ун-та, серия физ.-мат. наук, 2012, № 1, с.78-85.
8. Алиев Р.А., Амрахова А.Ф. Конструктивный метод решения сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта // Труды Инс-та Мат. и Мех. УроРАН, 2012, т.18, №4, с. 14-26.
9. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. I., М.: Мир, 1965, 615 с.
10. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977, 512 с.
11. Jackson D. Über die Genauigkeit der Annaherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grads und trugonometrischen Summen gegebener Ordnung, Diss.Göttingen, 1911.
12. Стечкин С.Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН ССР, сер. матем. 1951. т. 15, в. 3, с. 219-243.
13. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977, 640 с.

SİNQULYAR İNTEQRALIN HÖLDER FƏZALARINDA APPROKSİMASİYASI HAQQINDA

A.F.ƏMRAHOVA

XÜLASƏ

İşdə Hilbert nüvəli sinqulyar inteqral operator və requlyar inteqral operator xüsusi şəkildə olan operatorlar ardıcıllığı ilə approksimasiya olunurlar, isbat olunur ki, sinqulyar operator üçün approksimasiya operatorları bu operatorun əsas xassələrini saxlayırlar və buna görə də alınan qiymətləndirmələr yığılma sürəti nöqteyi-nəzərincə daha dəqiq nəticələr verir.

Açar sözlər: sinqulyar inteqral, requlyar inteqral, Hölder fəzası, Hilbert nüvəsi, approksimasiya operatorları, yığılma sürəti.

APPROXIMATION OF THE SINGULAR INTEGRAL IN HOLDER SPACES

A.F.AMRAHOVA

SUMMARY

This article deals with a singular integral operator with Hilbert kernel and a regular integral operator is approximated by sequences of operators of special form, and it is proved that for a singular operator approximating operators retain properties similar to the basic properties of this operator, and therefore the estimates obtained in terms of speed of convergence give more accurate results.

Key words: singular integral, regular integral, Holder space, Hilbert kernel, approximating operators, speed of convergence.

Принято в редакцию: 14.01.2013 г.
Подписано к печати: 06.03.2013 г.